

Argumentarea direcției științifice „STUDIUL CALITATIV AL ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ORDINARE”

Direcția științifică dată este dedicată studiului soluțiilor unei ecuații diferențiale (o egalitate în care figurează o variabilă independentă definită pe un domeniu, o funcție de această variabilă și derivata acestei funcții) nonintegrabile (nu există o egalitate în care să figureze variabila dată și funcția) prin diverse metode calitative. În cercetările mele matematice sunt abordate ecuații diferențiale polinomiale bidimensionale, în care derivata este egală cu un raport de polinoame algebrice în care figurează variabila independentă și funcția necunoscută. Aceste ecuații au numeroase aplicații practice și, în același timp, prezintă un interes teoretic: pe de o parte ele sunt obiecte interdisciplinare în studiul carora intervin metode analitice, algebrice, geometrice, metode de calcul simbolic și numeric; pe de altă parte, datorită unor probleme enunțate în urmă cu peste o sută de ani de Henri Poincaré și David Hilbert, nerezolvate până în prezent nici în cazul sistemelor diferențiale pătratice. Aceste ecuații diferențiale au soluții analitice, printre care sunt ciclurile limită (soluții netriviabile periodice izolate) care sunt importante și pentru multiple aplicații în chimie, biologie, imunologie, dinamica populațiilor, etc. Ciclurile limită sunt obiecte care prin natura lor implicită, misterioasă, scapă unei cunoașteri, unei analize sistematice. Partea a doua a problemei a 16-a, formulată de Hilbert în anul 1900 la Congresul Matematic Internațional de la Paris, este formulată pentru ciclurile limită și nu este rezolvată până în prezent nici în cazul sistemelor diferențiale pătratice. Problemele studiului calitativ ale acestor ecuații diferențiale sunt de o importanță deosebită, cer abordare pe verticală și implică cercetări continue cu metode variate interdisciplinare.

Direcția științifică dată include numeroase subdirecții, printre care evidențiem cele cu aportul meu personal:

- Studiul sistemelor diferențiale polinomiale cu singularități de tip centru (un centru este un punct din plan inconjurat, într-o vecinătate a sa, de soluții periodice). Clasificarea topologică completă și corectă a sistemelor diferențiale pătratice cu singularități de tip centru a fost dată în lucrarea [1].
- Studiul global al singularităților unui sistem diferențial polinomial. Lucrarea [2] este o lucrare cu caracter global, în care este studiat comportamentul tuturor singularităților la infinit a întregii clase de sisteme diferențiale pătratice.
- Clasificarea geometrică ale tuturor singularităților finite și infinite a întregii clase de sisteme diferențiale pătratice. Este inițiat un vast program de cercetare cu caracter global al sistemelor pătratice cu participanți din Canada, Spania, Moldova. Programul complet se va extinde pe o perioadă mai lungă de timp, deoarece apreciem că el va conduce la peste 500 de configurații globale de singularități. Un element important în această clasificare este lucrarea [3], dedicată singularităților slabe (focar și șea), care va fi integrată în clasificarea completă.
- Integrabilitatea ecuațiilor diferențiale polinomiale. Caracterul algebric al acestor ecuații diferențiale polinomiale permite studiul integrabilității prin aplicarea metodei de integrare algebro-geometrice a lui Darboux. Lucrările [4,5] sunt obținute în această direcție, care prevede efectuarea unor numeroase cercetări comune, deoarece programul de cercetare este foarte vast.

Remarcăm, că problema lui Poincaré despre integrabilitatea algebrică a sistemelor polinomiale, formulată în 1891, nu este rezolvată până în prezent nici în cazul sistemelor diferențiale pătratice.

- Aplicarea polinoamelor invariante (invarianti și comitanți algebrici) în studiul calitativ al ecuațiilor diferențiale ordinare. Programul, elaborat cu participarea specialiștilor din Canada, Spania, Moldova, este focalizat pe probleme cu caracter global și este astăzi în plină dezvoltare. Este un program care a dus deja și va continua să ducă la rezultate mai esențiale, dificil de obținut fără această viziune globală în cercetare. În acest program o contribuție esențială parvine specialiștilor din domeniul invariantilor și comitanților algebrici ai ecuațiilor diferențiale ordinare, deoarece polinoamele invariante intervin în aceste clasificări [6]. Această contribuție este aportul școlii matematice de ecuații diferențiale din Republica Moldova, fondată de academicianul A.Ș.M. Constantin Sibirschi. Aplicarea polinoamelor invariante în arealul internațional de cercetare din domeniu a dus la recunoașterea pe plan internațional a acestei școli matematice. Lucrările acestei școli încep să fie cunoscute și apreciate atât în țară, cât și peste hotare. Rezultatele lucrărilor, care nu utilizau concepte globale, erau formulate în termeni de coeficienți ai ecuațiilor, în prezentări particulare ale sistemelor diferențiale. Clasificările realizate cu polinoame invariante pot fi aplicate oricăror forme canonice ale acestor sisteme și calculele pot fi efectuate cu ajutorul programelor de calcul simbolic, de exemplu Mathematica sau Maple. Acest lucru are o importanță practică mare, deoarece clasificările obținute cu aplicarea polinoamelor invariante devin accesibile la numeroși cercetători, care folosesc aceste sisteme polinomiale în alte discipline științifice.

Referințe bibliografice:

1. Вулпе Н. **Аффинно инвариантные условия топологического различения квадратичных систем при наличии центра.** *Дифференциальные уравнения.* Т. 19, ном. 3, 1983, стр. 371-379
2. Nicolaev I., Vulpe N. **Topological Classification of Quadratic Systems at Infinity.** *Journal of London Mathem. Society.* (2) 55, 1997, pp. 473-488 pp.
3. Vulpe N. **Characterization of the finite weak singularities of quadratic systems via invariant theory.** *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications.* 2011, Vol. 74, No. 4, pp. 6553-6582.
4. Artes J.C., Llibre J, Vulpe N. **Quadratic systems with a polynomial first integral: a complete classification in the coefficient space \mathbf{R}^{12} .** *Journ. Differential Equations.* Vol. 246, (2009) pp. 3535-3558.
5. Llibre J., Mahdi A., Vulpe N. **Phase portraits and invariant straight lines of cubic polynomial vector fields having a quadratic rational first integral.** *Rocky Mountain Journal of Mathematics.* 2011. Vol. 41, No. 5, pp. 1585-1629.
6. K.S.Sibirsky. **Introduction to the Algebraic Theory of Invariants of Differential Equations.** Manchester University Press. 1988.